10° Μάθημα:

16/12/2019

P(τελ. απορ.) = 1

$$P(\text{απορ. στο } a) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-S_0 \cdot b}}{e^{S_0 a}-e^{-S_0 b}}, & \mu \neq 0 \\ \dfrac{b}{a+b}, & \mu = 0 \end{cases}$$

P(απορ. στο b) = 1 − P(απορ. στο a)

$$ET = \begin{cases} \dfrac{EX_T}{\mu}, & \mu \neq 0 \\ \dfrac{EX_T^2}{\sigma^2}, & \mu = 0 \end{cases}$$

1 φράγμα απορ.	a
$\mu = 0$	1
$S_0 > 0$	$1/e^{S_0 a}$
$S_0 < 0$	1

1 φράγμα απορ.	$-b$
$\mu = 0$	1
$S_0 > 0$	1
$S_0 < 0$	$e^{S_0 b}$

ΒΙΒΛΙΑΡΑΚΙ ΑΣΚΗΣΕΩΝ:

48 $P(\text{κερδ. } 1) = 0.6 = p$
$P(\text{χάνει } 1) = 0.4 = q$
$p + q = 1$
b ευρώ, $b > 0$

Κέρδος a ή χάνει όλα τα χρήματα του
X_n: η σ.δ. που περιγράφει το κέρδος του μετά το n-οστό παιχνίδι
Α.Τ.Π. με 2 φράγματα απορ. στα σημεία $a, -b$, $b > 0$
με $X_0 = 0$

α. Πρέπει να δείξω $P(\text{τελ. απορ}) = 1$ ή ισοδύναμα
$P(-b < X_n < a) = 0$.
$P(-b < X_n < a) \leq P(-b < X_n^* < a) = P(-b < \sum Z_i < a) \xrightarrow{\text{κ.ο.θ.}} 0$
(το έχουμε δείξει)

β. Ζητάει να τελειώσει το παιχνίδι και να είναι κερδισμένος.
Έχω $X_0 = 0$
$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, όπου Y_i είναι η τ.μ. της i-οστής μετ/σης

με $P(Y_i = y) = \begin{cases} p, & y = 1 \\ q, & y = -1 \end{cases}$

με $E Y_i = p - q = 0.6 - 0.4 \neq 0$ και πεπ/νο
$\text{Var} Y_i = E Y_i^2 - (E Y_i)^2 = p + q - (p-q)^2 = 1 - 0.2^2 \neq 0$ άρα πεπερασμένο

$g(s) = E(e^{sY}) = p e^{s \cdot 1} + q e^{-s}$

Γνωρίζω ότι: $E\left(g(s)^{-T} e^{X_T \cdot s}\right) = 1 \quad \forall s$
Επιλέγω το s_0 που είναι τ/ω $g(s_0) = 1$ με $s_0 \neq 0$.
$g(s_0) = 1 \Rightarrow p e^{s_0} + q e^{-s_0} = 1 \Rightarrow p(e^{s_0})^2 + q - e^{s_0} = 0$
Επιλέγω: $\boxed{e^{s_0} = \lambda}$ $\quad \lambda_{1,2} = 1,\ q/p$ $\quad$ άρα $s_0 = \ln \frac{q}{p}$

$E\left[\cancel{g(s)}^{1}{}^{-T} + e^{X_T \cdot s}\right] = 1 \quad \forall s$

X_T διακριτή τμ. a, $-b$

$E(e^{X_T s_0}) = 1 \Rightarrow$
$P(X_T = a) e^{a s_0} + P(X_T = -b) e^{-b s_0} = 1$
$P(\text{απορ } a) e^{a s_0} + (1 = P(\text{απορ. στο } a)) \cdot e^{-b s_0} = 1$

$s_0 = \ln \frac{0.4}{0.6} = \ln \frac{2}{3} < 0$

γ. ET $E\left(g(s)^{-T} e^{X_T s}\right) = 1$ για $s_0 = 0$

δ. P(απορ. στο α με ένα φράγμα απορ.) =
$= \lim_{b \to \infty} \dfrac{1 - e^{-s_0 b}}{e^{s_0 a} - e^{-s_0 b}} = 1$ (εφόσον $s_0 < 0$)

(Αν μας ζητούσε μόνο το δ έπρεπε να κάνω την αποδ. τύπων για το α, β, γ ερώτημα)

ε. Κέρδος 0 ευρώ σε οποιαδήποτε χρον. στιγμή (μελλοντική στιγμή) και εκεί να τελειώσει το παιχνίδι?

συμπλήρωση δική τα

P(κέρδος 0 σε κάποια μελλοντική στιγμή και τέλος) =

= P(να κερδίσω στο 1° παιχνίδι και από το κέρδος +1 να πάω κάποια στιγμή στο 0 και τέλος (A_1)
ή (∪)
να χάσω στο 1° παιχνίδι και από το κέρδος −1 να πάω κάποια στιγμή στο 0 και τέλος (A_2)
ή (∪)
ισοπαλία στο 1° παιχνίδι ή τέλος (A_3)) =

(A_1, A_2, A_3 ξένα μεταξύ τους)

(→ στην άσκ. δεν έχω ισοπαλία οπότε δεν θα το έβαζα)

$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) =$

$= p \cdot P\left(\begin{matrix}\text{να επιστρέψω στο 0 και} \\ \text{τέλος ενώ είμαι στο 1}\end{matrix}\right) + q \cdot P\left(\begin{matrix}\text{να επιστρέψω στο 0 και} \\ \text{τέλος ενώ είμαι στο -1}\end{matrix}\right) +$

$+ 1-p-q =$

$= p \cdot P(\text{απορ. στο σημείο } 0 \mid X_0 = 1)$
$+ q \cdot P(\text{απορ. στο σημείο } 0 \mid X_0 = -1) + 1-p-q$

Τα αλλάζω = μετατοπιση γιατί θέλω να χρησιμοποιήσω τους τύπους στη 1η σελ. κ' θέλω $X_0 = 0$

$= p \cdot P(\text{απορ. στο σημείο } \overset{-b=-1}{-1} \mid X_0 = 0)$
$+ q \cdot P(\text{απορ. στο σημείο } \underset{1=a}{1} \mid X_0 = 0) + 1-p-q$

$$= \begin{cases} p \cdot 1 + q \cdot 1 + 1-p-q & , s_0 = 0 \\ p \cdot 1 + q \cdot e^{-s_0} + 1-p-q & , s_0 > 0. \\ \boxed{p \cdot e^{s_0} + q \cdot 1 + 1-p-q \quad , s_0 < 0} \end{cases}$$

Στη δική μας περίπτωση $p = 0.6$, $q = 0.4$, $s_0 < 0$

Πάλι μπορεί να πέσει μόνο το τελευταίο ερώτημα και να πρέπει να αποδ. τα προηγούμενα

ίδια ακριβώς με αυτή είναι η 49

56 Μ.Α. 2 καταστάσεων $\Rightarrow$ $P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1-a & a \\ 1 & b & 1-b \end{array}$

Ξεκινώντας από την i να επισκέπτεται την j για πρώτη φορά μετά από n χρον. βημ.

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j,\ X_r \neq j \quad r<n \mid X_0 = i)$$

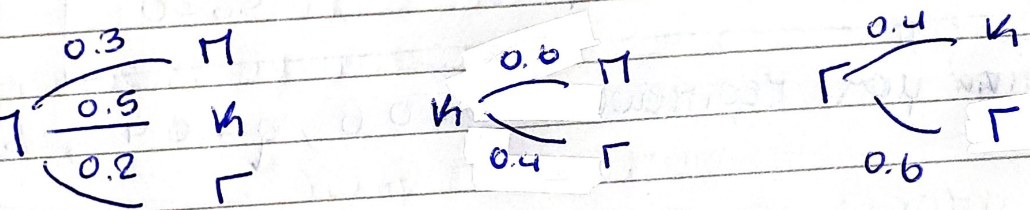
$$f_{00}^{(n)} = P(0 \to 1 \to 1 \to 1 \to \dots \to 1 \to \overset{n\text{-οστό βήμα}}{0}) = a \cdot (1-b)^{n-2} \cdot b$$

$$f_{01}^{(n)} = P(0 \to 0 \to \dots \to 0 \to 1) = (1-a)^{n-1} \cdot a$$

$$f_{10}^{(n)} = P(1 \to 1 \to 1 \to \dots \to 1 \to 0) = (1-b)^{n-1} \cdot b$$

$$f_{11}^{(n)} = P(1 \to 0 \to \dots \to 0 \to 1) = b \cdot (1-a)^{n-2} \cdot a$$

52

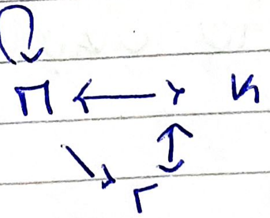


Όταν αρχίσαμε να τους παρατηρούμε:

$P(\text{νίκης } Π) = 0.4$
$P(\text{νίκης } Κ) = 0.3.$
$P(\text{νίκης } Γ) = 0.3.$

$\Rightarrow$ είναι το διάνυσμα $p^{(0)} = (0.4 \quad 0.3 \quad 0.3)$

$$P = \begin{array}{c|ccc} & Π & Κ & Γ \\ \hline Π & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ Κ & 0.6 & 0 & 0.4 \\ Γ & 0 & 0.4 & 0.6 \end{array}$$



Μη διαχ. Μ.Α. πεπερασμένου πλήθος καταστάσεων
$\Rightarrow$ θετ. επαν. επίσης απεριοδική
π.χ. $d_Π = 2$.
Εφαρμόζω foster!!!

$(x_0 \ X_1 \ X_2) = (x_0 \ x_1 \ x_2) P$ ...

... Θ. Foster

$(\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2) = \left(\frac{12}{46}, \frac{14}{46}, \frac{20}{46} \right)$

στην λύση δεν χρησιμοποιήσαμε τις πιθ. νίκης που έγραψα στην αρχή. Είναι σωστή η λύση ενώ δεν χρησιμοποίησα όλα τα δεδομένα? ΝΑΙ!!!

53 Παρόμοια με την ανάλογη θεωρία

54 Εκτός ύλης

61 $P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$ όλες επικοινωνούν με όλες.

$\left.\begin{matrix} \text{Μη διασπώμενη Μ.Α.} \\ \text{ΠΕΠ. ΠΛ. ΚΑΤ.} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ ΘΕΤ. ΕΠΑΝ. Επίσης ΑΠΕΡΙΟΔΙΚΗ.

$\Pi = \left(\frac{6}{25}, \frac{10}{25}, \frac{9}{25} \right)$, $\mu = \left(\frac{25}{6}, \frac{25}{10}, \frac{25}{9} \right)$

60 κι 59 κι 57 Εκτός ύλης

58 Ένα νόμισμα $\xrightarrow{\text{πιθ. εμφ. γράμματα}}$ a

ενώ ένα άλλο έχει πιθ. εμφ. γραμ. b.

ΓΡΑΜΜΑ $\Rightarrow$ Αλλάζω κέρμα.

X_n η σ.δ. που παριστάνει ποιο νόμισμα έχει επιλεγεί στην n-οστή δοκιμή.

Πρόκειται για σ.δ. σε διακριτό χρόνο με χώρο καταστάσεων $S = \{ \underset{1^o \text{ νομ.}}{0}, \underset{2^o \text{ νομισ.}}{1} \}$

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1-a & a \\ 1 & b & 1-b \end{array}$$

$P_{00} = P\Big($ότι n-οστή ρίψη έχω το 1° νομ. και ότι n+1 έχω το ίδιο$\Big)$

P_{10}

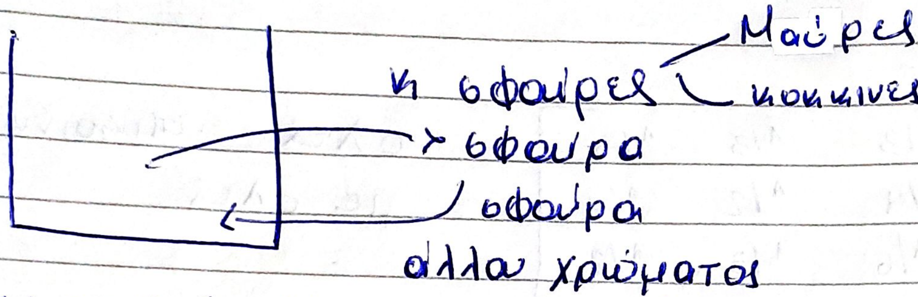
$P(X_{35}=0) = ?$

Θα βρω $p^{(n)} = p^{(0)} \cdot P^n$

Προσδιορίζω P^n

$$p^{0} = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right)$$

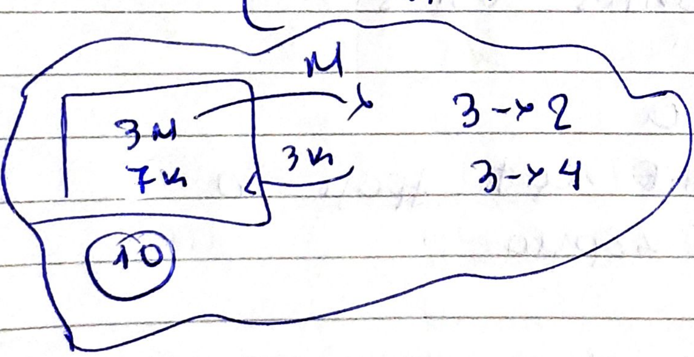
1



X_n: αριθμός Μ αμέσως μετά το n-οστό πείραμα → διακριτός χρόνος

Χώρος καταστάσεων: $S = \{0, 1, 2, \dots, \kappa\}$

$$X_n = \begin{cases} X_{n+1} \pm 1 & , X_{n-1} \neq 0 \\ 1 & , X_{n-1} = 0 \\ \kappa - 1 & , X_{n-1} = \kappa \end{cases}$$



$$P = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & \cdots & \kappa-1 & \kappa \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ 1 & 1/\kappa & 0 & \frac{\kappa-1}{\kappa} & & & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{\kappa} & 0 & \frac{\kappa-2}{\kappa} & & 0 \\ \vdots & & & \cdots & & & \\ & & & \cdots & & & \\ \kappa-1 & & & & & & \\ \kappa & 0 & 0 & & & 1 & 0 \end{array}$$

② μ ΜΑΥΡΕΣ
κ ΚΟΚΚΙΝΕΣ → σφαίρα προσθέτονται α σφαίρες του ίδιου χρώματος

X_n : αριθμός Μ μετά το n-οστό πείραμα.

$S = \{\mu, \mu+\alpha, \mu+2\alpha, \mu+3\alpha, \dots\}$

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} + \alpha & \text{αν βγάλω μαύρη στο n-στό} \\ X_{n-1} + 0 & \text{αν βγάλω κοκκ.} \end{cases}$$

$$P_{ij}(n, n+1) = \begin{cases} 1 - \frac{i}{\mu+\kappa+n\alpha} & j = i \\ i/(\mu+\kappa+n\alpha) & j = i+\alpha \\ 0 & j \neq o. \end{cases}$$

$P_{i\,i+\alpha}^{(n,n+1)} = P\left(\begin{array}{l}\text{να εκλέξω μαύρη ενώ υπάρχουν} \\ i \text{ μαύρες στο n-οστό βήμα}\end{array}\right) = \frac{i}{\mu+\kappa+n\cdot\alpha}$

Η αλυσίδα δεν είναι ομογενής γιατί πιθ. $P_{ij}(n, n+1)$ εξαρτάται από το βήμα πραγματοποίησης δηλ. το n

③ Να ασχοληθώ στο σπίτι!

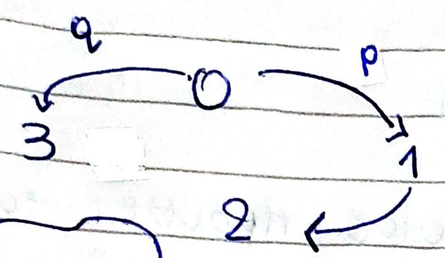
αποτελέσματα: $P_{i,i-1} = \frac{i^2}{N^2}$, $i \neq 0$

$$P_{i,i+1} = \left(\frac{N-i}{N}\right)^2 \, , \quad i \neq N$$

$$P_{i,i} = \frac{2i(N-i)}{N^2} \, , \quad i \neq 0, N.$$

$$P_{01} = P_{N,N-1} = 1$$

9



$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & p & 0 & q \\ 1 & q & 0 & p & 0 \\ 2 & 0 & q & 0 & p \\ 3 & p & 0 & q & 0 \end{array}$$

$p + q = 1$

$$p^{(0)} = \left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \right)$$

$P(X_2 = 3) = ?$ ή $P(X_{20} = 3)$

μπορεί να ζηταει και αυτό

$p^{(n)} = p^{(0)} \cdot P^n$

$P^2 =$

να δω την 10!

37

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Να υπολ. $P(X_{16} = 3 \mid X_0 = 1) = P_{13}^{(16)}$

και $P(X_{12} = 3 \; X_{16} = 3 \mid X_0 = 1) = P_{13}^{(12)} \cdot P_{33}^{(4)}$

πίνακας P^{12}

πίνακας P^4

$p^{(n)} = p^{(0)} \cdot P^n$

$$p^{(n)} = p^{(0)} \cdot \begin{bmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} & P_{02}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} & P_{12}^{(n)} \\ P_{20}^{(n)} & P_{21}^{(n)} & P_{22}^{(n)} \end{bmatrix}$$

(24) P(Χιονισμένη μέρα διαδέχεται μια καθαρή) = 0.25 = P_{10}

ΥΠΑΡΟΝ.

P(Καθαρή μέρα διαδέχεται μια χιον.) = 0.335 = P_{01}

0 = ΧΙΟΝΙ , 1 = ΚΑΘΑΡΗ

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1-a & a = 0.335 \\ 1 & b = 0.25 & 1-b \end{array}$$

ΧΙΟΝΙ $\boxed{25/12}$ 0   26   27   ΧΙΟΝΙ $\boxed{28/12}$ 0

$P_{00}^{(3)} = ?$

$p(n) = p(0) \cdot P^n$

$$p(n) = p(0) \cdot \begin{bmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Μέσο μήκος Χιονισμένης Περιόδου = ?

Π.Χ. ΧΙΟΝΙ ΧΙΟΝΙ ΚΑΘΑΡΗ περ. μήκος = 1

Π.Χ. ΧΙΟΝΙ ΧΙΟΝΙ ΧΙΟΝΙ ΚΑΘ περ. μήκος = 2

T τ.μ. Χιονισμένης χρον. περιόδου

Διακριτή τ.μ.

Δυνατές Τιμές 1, 2, 3, 4, ...

$P(T=1) = P(0 \to 0 \to 1) = (1-a) \cdot a$

$P(T=2) = P(0 \to 0 \to 0 \to 1) = (1-a)^2 \cdot a$

$P(T=k) = (1-a)^k \cdot a \quad , k = 1, 2, \ldots$

$\sum x^n = (1-x)^{-1}$

$\sum n x^{n-1} = (1-x)^{-2}$

$$ET = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot (1-a)^k \cdot a = a(1-a) \sum k (1-a)^{k-1} =$$

$$= a(1-a)\left(1-(1-a)\right)^{-2} = \frac{1-a}{a}$$